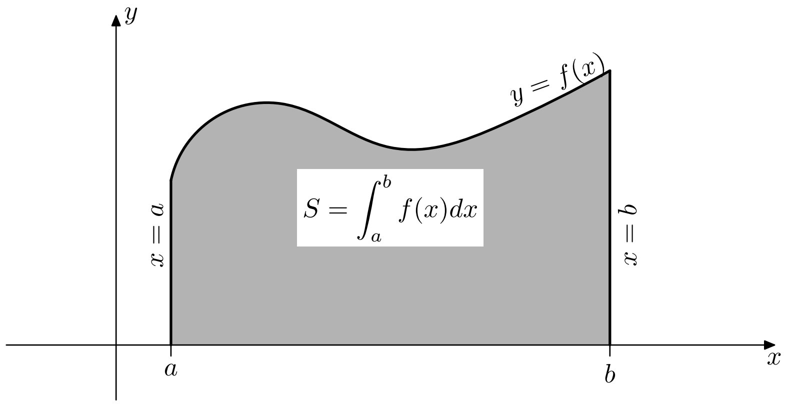
5.9 Pindala arvutamine ristkoordinaatides

Kui lõigul $[a;b]$ funktsioon $f(x) \geq 0$, siis määratud integraal tähendab geomeetriliselt niisuguse kõvertrapetsi pindala, mis on piiratud alt x-teljega, ülalt funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga, vasakult sirgega $x = a$ ja paremalt sirgega $x = b$.

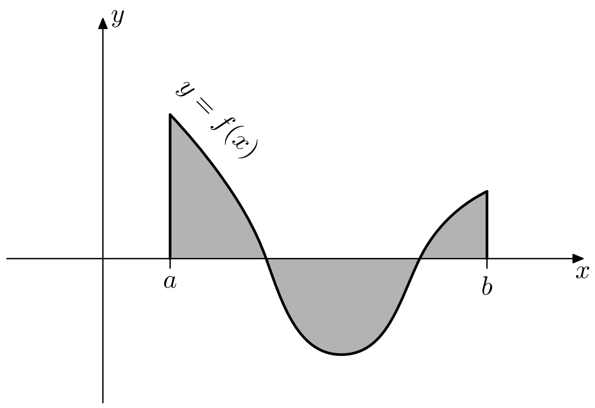


Joonis 5.1. kõvertarpetsi, kui $f(x) \geq 0$

Joonisel 5.1 esitatud kõvertrapetsi pindala on

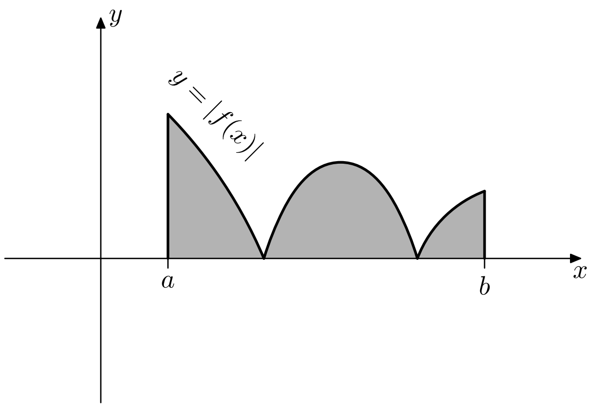
$$S_{abBA} = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{5.1}$$

Oletame, et funktsioon f võib lõigul $[a;b]$ omada ka negatiivseid väärtusi. Olgu vaja arvutada joonisel 5.2 esitatud kujundi, mis on piiratud sirgetega $x = a$, $x = b$, x-teljega ja funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga, pindala.



Joonis 5.2. Funktsiooni graafikuga ja x-teljega piiratud kõvertarpets

Kui asendada funktsioon $y = f(x)$ funktsiooniga $y = |f(x)|$, siis funktsiooni $y = |f(x)|$ graafiku ja x-teljega (joonis 5.3) piiratud kujundi pindala on võrdne joonisel 5.2 toodud kujundi pindalaga.



Joonis 5.3. Funktsiooni absoluutväärtuse graafikuga ja x-teljega piiratud kõvertarpets

Kuid $|f(x)| \geq 0$ tõttu on joonisel 5.3 esitatud kujundi pindala (seega ka joonisel 5.2 esitatud kujundi pindala) on (5.1) tõttu

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \tag{5.2}$$

Näide 1. Leiame sinosoidiga ja x-teljega piiratud kujundi ruumala, kui $x \in [0; 2\pi]$.

Kujund, mille pindala tuleb leida, on joonisel 5.4. Pindala arvtutamise valemist (5.2)

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx.$$

Määratud integraali lõigul aditiivsuse omaduse tõttu

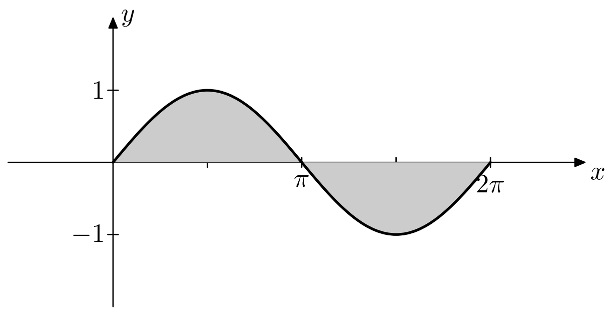
$$S = \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx.$$

Et aga

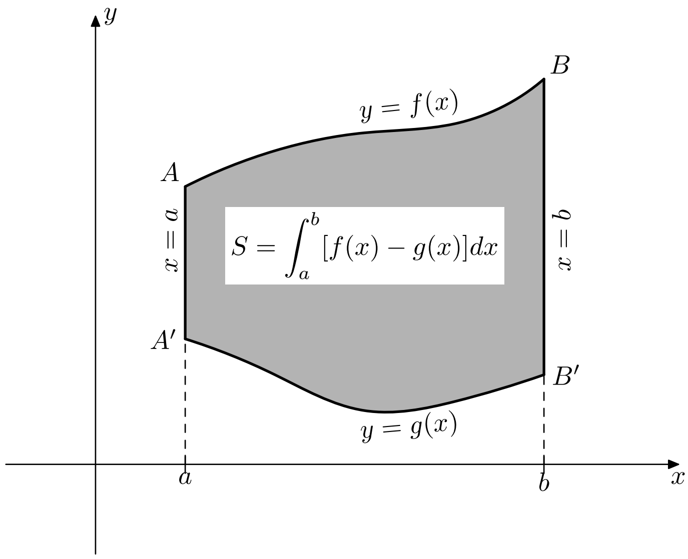
$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } \sin x \geq 0 \text{ ehk } x \in [0; \pi] \\ -\sin x, & \text{kui } \sin x < 0 \text{ ehk } x \in (\pi; 2\pi), \end{cases}$$

siis

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(-1-1) + 1 - (-1) = 4. \end{aligned}$$



Joonis 5.4. Sinusoidi ühe perioodi graafikuga ja x-teljega piiratud kõvertarpets



Joonis 5.5. Kahe funktsiooni graafikuga piiratud kõvertarpetsi pindala

Järgnevalt vaatleme kõvertrapetsit, mis ei ole alt piiratud x-teljega, vaid funktsiooni $y = g(x)$ graafikuga. Piirkond on kujutatud joonisel 5.5. Ilmselt on kõvertrapetsi $A'B'BA$ pindala kõvertrapetsite $abBA$ ja $abB'A'$ pindalade vahe.

$$S_{A'B'BA} = S_{abBA} - S_{abB'A'}.$$

Kuid (5.1) järgi

$$S_{A'B'BA} = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx,$$

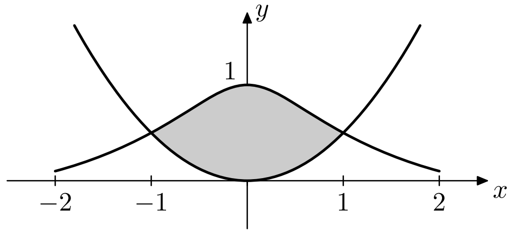
ehk määratud interdaali omaduse tõttu

$$S_{A'B'BA} = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx. \tag{5.3}$$

Märkus. Joonisel 5.5 on eeldatud, et lõigul $[a; b]$ on $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Tegelikult on mittenegatiivsuse nõue liigne. Valem kehtib, kui lõigul $[a; b]$ on täidetud tingimus $g(x) \leq f(x)$.

Näide 2. Arvutame joonega $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ja parabooliga $y = \dfrac{x^2}{2}$ piiratud kujundi pindala.

Mõlemad vaadeldavad funktsioonid on paarisfunktsioonid, seega mõlema graafikud ja järelikult ka nendega piiratud kujund (joonis 5.6) sümmeetriline y-telje suhtes. Joonte lõikepunktide abstsisside leidmiseks lahendame võrran-



Joonis 5.6. Joonega $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ja paraboliga $y = \dfrac{x^2}{2}$ piiratud kõvertarpets

di

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Antud võrrandist saame biruutvõrrandi $x^4 + x^2 - 2 = 0$, millest $x^2 = 1$ või $x^2 = -2$. Teisel võrrandil reaalarvulised lahendid puuduvad, esimesel on aga kaks lahendit $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$, mis on ühtlasi joonte lõikepunktide abstsissid. Seega (5.3) tõttu on joonisel 5.6 oleva kõvertrapetsi pindala

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left(\arctan x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Edasi oletame, et kõvertrapets on ülalt piiratud parameetrilisel kujul esitatud joonega

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

mis on esitatud joonisel 5.7.

Eeldame, et punktis A on parameetri t väärtus α ja punktis B $t = \beta$. Et punktis A on $x = a$ ja punktis B on $x = b$, siis

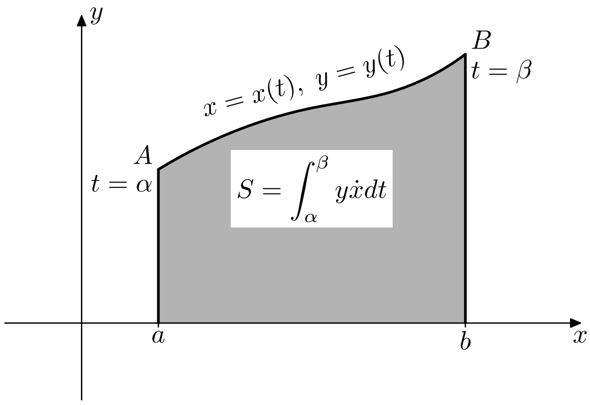
$$a = x(\alpha) \quad ja \quad b = x(\beta). \tag{5.4}$$

Kirjutame kõverttrapetsi pindala (5.1) integraalina

$$S_{abBA} = \int_a^b y dx$$

ja läheme selles integraalis üle muutujale t. Muutuja y on parameetrilistest võrranditest asendatav, muutja x diferentsiaal $dx = \dot{x}dt$ ja rajad muutuja t jaoks saame võrranditest (5.4). Asendades saame, et antud juhul on kõvert-rapetsi $abBA$ pindala arvutatav valemist

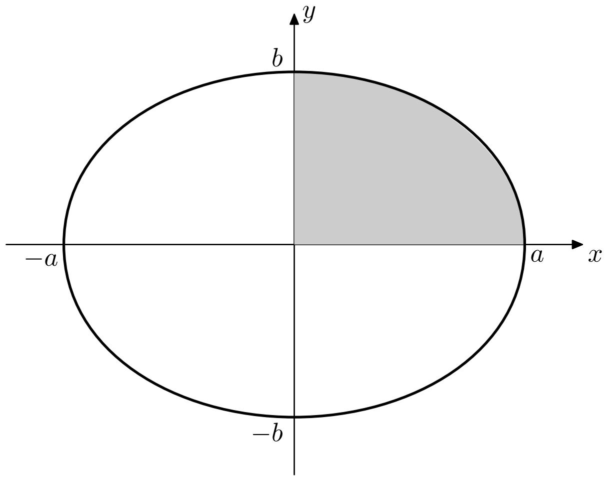
$$S_{abBA} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\dot{x}dt. \tag{5.5}$$



Joonis 5.7. Parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni graafikuga piiratud kõvertarpetsi pindala

Näide 3. Arvutame ellipsiga $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ piiratud kujundi pindala.

Antud ellips on kujutatud joonisel 5.8.



Joonis 5.8. Ellips pooltelgedega a ja b

Ellipsi keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja poolteljed on a ning b. Et vaadeldav ellips on sümmeetriline mõlema koordinaattelje suhtes, siis arvutame koordinaattasandi esimeses veerandis paikneva osa pindala ja korrutame selle 4-ga. Veerandi ellipsi vasakpoolses otspunktis $x = 0$ ja $y = b$, seega parameeter $t = \frac{\pi}{2}$, parempoolses punktis aga $x = a$ ja $y = 0$, seega $t = 0$. Leides veel $\dot{x} = -a \sin t$, saame valemist (5.5) ellipsi pindala

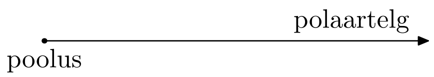
$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \sin t(-a \sin t) dt = -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt.$$

Pärast rajade vahetamist ja poolnurga siinuse valemi kasutamist

$$\begin{aligned} S &= 2ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt - ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) = \\ &= 2abt \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - ab \sin 2t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \end{aligned}$$

5.10 Polaarkoordinaadistik. Pindala arvutamine polaarkoordinaatides

Peale Cartesiuse ristkoordinaadistiku on kasutusel veel teisi taustsüsteeme, mille suhtes punkti asukoht tasandil on üheselt määratud. Üheks selliseks taustsüsteemiks on *polaarkoordinaadistik*, mis koosneb ühest fikseeritud punktist tasandil, nn *poolusest* ja sellest punktist lähtuvast teljest, nn *polaarteljest*.



Joonis 5.9. Polaarkoordinaadistik

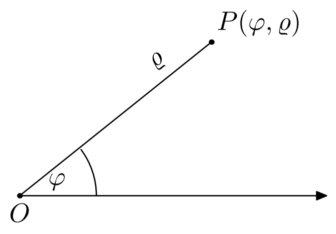
Polaarkoordinaadistikus on punkti P asukoht üheselt määratud *polaarnurgaga*, so nurgaga φ, mis jääb punkti P ja poolust O ühendava sirge ja polaartelje vahele, ning *polaarkauguse* ehk *polaarraadiusega* ϱ, so punkti P kaugusega poolusest O ehk vektori $\overrightarrow{OP}$ pikkusega (vt joonis 5.10).

Polaarnurka φ ja polaarraadiust $\varrho = |\overrightarrow{OP}|$ nimetetakse punkti P *polaarkoordinaatideks*. Seda asjaolu märgitakse $P(\varphi, \varrho)$.

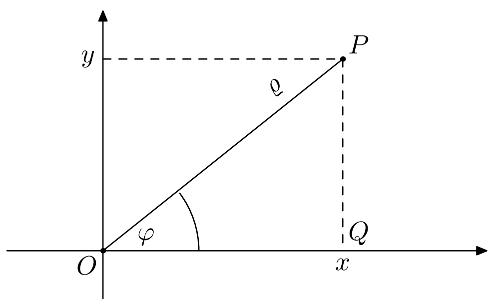
Järgnevalt leiame seosed punkti P polaarkoordinaatide ja ristkoordinaatide vahel, kui ristkoordinaadistik on paigutatud polaarkoordinaadistiku suhtes nii, et x-telje positiivne suund ühtib polaartelje suunaga ja y-telg on tõmmatud risti x-teljega läbi pooluse.

Olgu punkti P ristkoordinaadid x ja y ning polaarkoordinaadid φ ja ϱ. Joonisel 5.11 esitatud täisnurksest kolmnurgast OQP saame, et $\cos \varphi = \frac{x}{\varrho}$ ja $\sin \varphi = \frac{y}{\varrho}$, millest

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \end{cases} \tag{5.6}$$



Joonis 5.10. Punkti P polaarkoordinaadid



Joonis 5.11. Rist- ja polaarkoordinaadid

Tõstes võrrandites (5.6) mõlemad pooled ruutu ja liites, saame, et $x^2 + y^2 = \varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi$, millest

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.7}$$

Jagades võrdustest (5.6) teise esimesega, eeldusel, et $x > 0$, saame $\frac{y}{x} = \tan \varphi$. Et arkustangensi väärtused on kõik vahemikus $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, aga polaarnurk muutub poollõigul $(-\pi; \pi]$, siis tuleb polaarnurga üheseks määramiseks ristkoordinaatide x ja y järgi kasutada valemit

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, \quad \text{kui } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, \quad \text{kui } x < 0 \; y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, \quad \text{kui } x < 0 \; y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, \quad \text{kui } x = 0 \; y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \quad \text{kui } x = 0 \; y < 0, \end{cases} \tag{5.8}$$

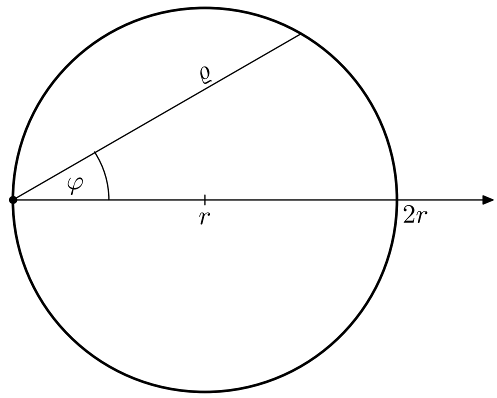
Paljudel funktsioonidel on polaarkoordinaadistikus oluliselt lihtsam esitusviis kui ristkoordinaatides. Polaarkoordinaatide puhul loetakse tavaliselt argumendiks polaarnurk φ ja funktsiooniks polaarraadius ϱ. Seega funktsioon polaarkoordinaatides esitatakse sõltuvusena $\varrho = \varrho(\varphi)$, mis iseloomustab, kuidas polaarraadius sõltub polaarnurgast.

Näide 1. Teisendame ilmutamata kujul antud funktsiooni $(x-r)^2+y^2=r^2$ polaarkoordinaatidesse.

Selle funktsiooni graafikuks on ringjoon keskpunktiga $(r;0)$ ja raadiusega r. Avades antud võrduses sulud, saame $x^2-2rx+r^2+y^2=r^2$ ehk $x^2+y^2=2rx$. Minnes teisenduste (5.6) abil üle polaarkoordinaatidele, saame $\varrho^2=2r\varrho\cos\varphi$ ehk

$$\varrho = 2r\cos\varphi.$$

Näeme, et polaarraadius ϱ avaldub polaarnurga φ suhteliselt lihtsa ilmutatud funktsioonina, mille graafikuks olev ringjoon on joonisel 5.12.



Joonis 5.12. Funktsioon $\varrho = 2r\cos\varphi$

Näide 2. Teisendame polaarkoordinaatidesse ilmutamata kujul esitatud funktsiooni $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, kus konstant $a>0$.

Selle funktsiooni graafiku joonestamine ristkoordinaatides on küllaltki keeruline. Teisendame funktsiooni teisenduste (5.6) abil polaarkoordinaatidesse. Asendades muutujad x ja y, saame $\varrho^4=a^2(\varrho^2\cos^2\varphi-\varrho^2\sin^2\varphi)$. Pärast saadud võrduse jagamist ϱ^2-ga saame $\varrho^2=a^2\cos 2\varphi$ ehk

$$\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

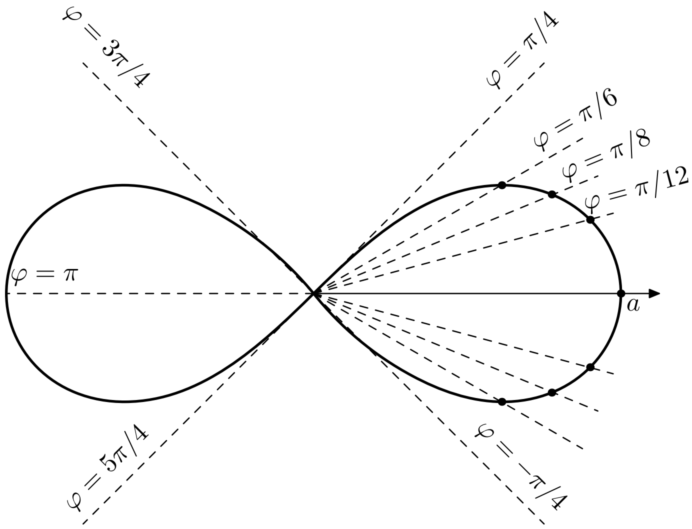
Jälle on funktsioon polaarkoordinaatides oluliselt lihtsam kui ristkoordinaatides. Paneme tähele, et joon tekib piirkonda, kus $\cos 2\varphi \geq 0$ ehk $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ või $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. Andes esimeses piirkonnas polaarnurgale φ väärtusi, arvutame vastavad polaarkauguse ϱ väärtused

φ	0	$\pm\frac{\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{8}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$
ϱ	a	$a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$a\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$a\sqrt{\frac{1}{2}}$	0

ja andes teises piirkonnas φ-le väärtusi, leiame

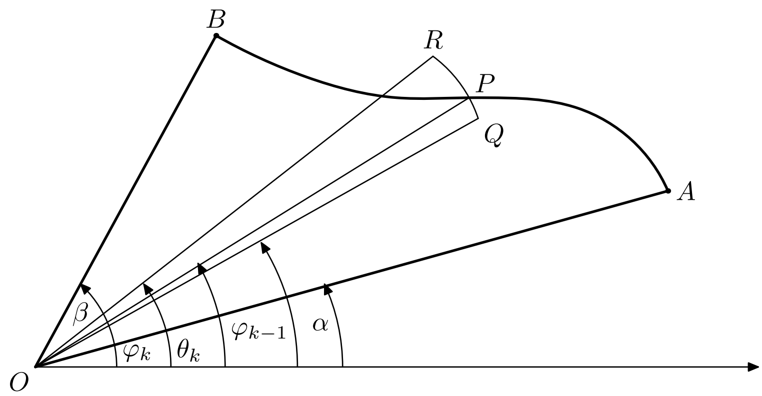
φ	π	$\pi\pm\frac{\pi}{12}$	$\pi\pm\frac{\pi}{8}$	$\pi\pm\frac{\pi}{6}$	$\pi\pm\frac{\pi}{4}$
ϱ	a	$a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$a\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$a\sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Asendame täpsed ϱ väärtused ligikaudsetega ja kanname polaarkoordinaadistikku punktid $(0; a)$, $\left(\pm\frac{\pi}{12}; 0,93a\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{8}; 0,84a\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{6}; 0,71a\right)$, $\left(\pi \pm \frac{\pi}{12}; 0,93a\right)$, $\left(\pi \pm \frac{\pi}{12}; 0,84a\right)$, $\left(\pi \pm \frac{\pi}{12}; 0,71a\right)$ ja (π, a). Tekkinud joont nimetatakse *Bernoulli lemniskaadiks.*



Joonis 5.13. Bernoulli lemniskaat

Tuletame valemi polaarkoordinaatides antud kõversektori pindala arvutamiseks. Olgu kõversektor OAB piiratud sirgetega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ ning joonega $\varrho = \varrho(\varphi)$ (joonis 5.14). Antud kõversektoris polaarnurk $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.



Joonis 5.14. Kõversektor

Jaotame lõigu $[\alpha; \beta]$ suvalisel viisil n osalõiguks punktidega

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_n = \beta.$$

Igale jaotuspunktile vastab üks nurk polaarkoordinaadistikus.

Igal osalõigul valime suvalise punkti $\theta_k \in [\varphi_{k-1}; \varphi_k]$ ja lähendame kõversektorit, mille kesknurk on $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ ringi sektoriga OQR, mille kesknurk on $\Delta\varphi_k$ ja raadius polaarkaugus $\varrho(\theta_k)$ fikseeritud nurga θ_k korral. Joonisel vastab raadiusele lõik OP.

Kokku tekib meil n sellist ringi sektorit. Neist k-nda pindala on sektori pindala valemi järgi $\frac{\varrho^2(\theta_k)\Delta\varphi_k}{2}$. Liites kõikide ringi sektorite pindalad kokku, saame ligikaudu kõversektori OAB pindala

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varrho^2(\theta_k)}{2}\Delta\varphi_k.$$

Viimane summa on funktsiooni $\frac{\varrho^2(\varphi)}{2}$ integraalsumma lõigul $[\alpha; \beta]$. Tähistame maksimalse osalõigu pikkuse $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta\varphi_k$ ja vaatleme piirprotsessi $\lambda \to 0$. See aga tähendab, et kõikide sektorite kesknurgad kahanevad tõkestamatult ja sektorite pindalade summa hakkab üha täpsemalt esitama kõversektori OAB pindala. Kui eeldada funktsiooni $\varrho = \varrho(\varphi)$ pidevust lõigul $[\alpha; \beta]$, siis eksisteerib integraalsumma piirväärtus

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varrho^2(\theta_k)}{2}\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\varphi)d\varphi.$$

Järelikult arvutatakse kõversektori OAB pindala valemi

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\varphi)d\varphi \tag{5.9}$$

abil.

Näide 3. Arvutame Bernoulli lemniskaadiga $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ piiratud piirkonna pindala.

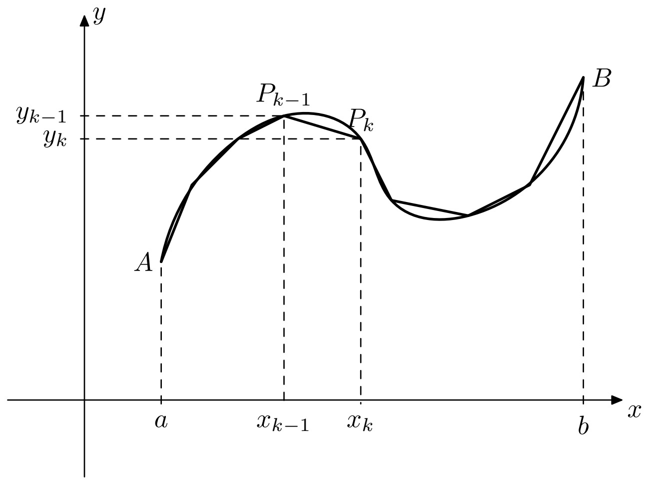
Joonisel 5.13 on ilmne, et sümmeetria tõttu piisab veerandi kujundi pindala arvutamisest ja selle 4-ga korrutamisest. Võtame selleks veerandiks osa, kus $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ ja arvutame valemi (5.9) abil

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \varrho^2 d\varphi = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = a^2 \sin 2\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

5.11 Kõverjoone kaare pikkus

Vaatleme joont AB, mis on funktsiooni $y = f(x)$ graafikuks (joonis 5.15). Tähistame punkti A abstsissi a-ga ja punkti B abstsissi b-ga. Eeldame, et funktsioon $f(x)$ on lõigul $[a; b]$ pidev ja omab vahemikus $(a; b)$ pidevat tuletist. Niisugustel eeldustel nimetatakse joont AB *siledaks.*

Valime joonel AB punktid $A = P_0,\ P_1,\ \ldots\ P_{k-1},\ P_k,\ \ldots P_n = B$ nii, et iga järgmise punkti abstsiss x_k oleks eelmisest x_{k-1} suurem,



Joonis 5.15. Kõverjoon ja sellesse joonestatud murdjoon

st $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$. Ühendame punktid P_{k-1} ja P_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ sirglõikudega. Nii tekib murdjoon $P_0P_1 \ldots P_{k-1}P_k \ldots P_n$. Tähistades murdjoone k-nda lüli pikkuse Δs_k, saame murdjoone pikkuseks summa

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta s_k. \tag{5.10}$$

Piirprotsess $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta s_k \to 0$ kindlustab murdjoone kõikide lülide pikkuste lähenemise 0-le.

Definitsioon 1. Kõverjoone kaare pikkuseks s nimetatakse sellesse kujundatud murdjoone pikkuse piirväärtust murdjoone pikima lüli lähenemisel 0-le, st

$$s = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n} \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k. \tag{5.11}$$

Punkti alguses tehtud eeldustel tuletame sellest definitsioonist lähtudes valemi kõverjoone kaare AB pikkuse arvutamiseks. Olgu $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Siis kõverjoone k-nda lüli pikkus on

$$\Delta s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\Delta x_k,$$

sest konstruktsiooni tõttu $\Delta x_k \ge 0$. Funktisoon $f(x)$ rahuldab Lagrange'i teoreemi eeldusi, seega leidub selline $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, et

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k)$$

ja

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k.$$

Kui $\Delta s_k \to 0$ siis ka $\Delta x_k \to 0$ ja definitsioon 1 järgi

$$s = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k.$$

Viimane summa on funktsiooni $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ integraalsumma. Seega määratud integraali definitsiooni kohaselt arvutatakse kaare AB pikkus valemist

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx. \tag{5.12}$$

Näide 1. Arvutame naturaallogaritmi $y = \ln x$ graafiku kaare pikkuse, kui $x \in [1; \sqrt{3}]$.

Leiame $y' = \dfrac{1}{x}$, $1 + y'^2 = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ ja $\sqrt{1+y'^2} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Valemi (5.12) järgi

$$s = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Saadud integraalis teeme muutuja vahetuse $t = \sqrt{x^2+1}$ ehk $t^2 = x^2+1$ ja $2tdt = 2xdx$, millest pärast mõlema poole jagamist suurusega $2x^2$ saame, et $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{tdt}{x^2} = \dfrac{tdt}{t^2-1}$. Kui $x = 1$, siis $t = \sqrt{2}$ ja kui $x = \sqrt{3}$, siis $t = 2$. Pärast muutuja vahetust

$$\begin{aligned} s &= \int_{\sqrt{2}}^{2} t \cdot \frac{tdt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} dt - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dt}{1-t^2} = \\ &= 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \\ &= 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} - \ln \sqrt{3} = 2 - \sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \approx 0,918. \end{aligned}$$

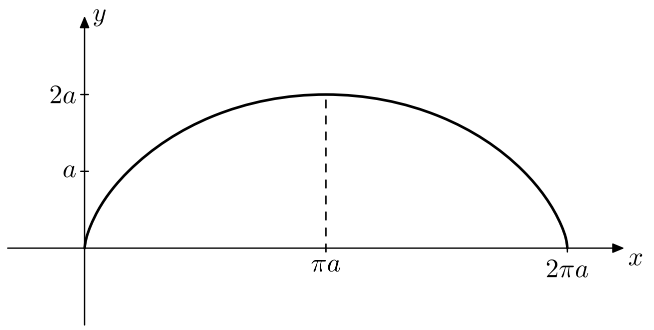
Olgu joon AB parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ graafikuks. Olgu punktis A parameetri väärtus α ja punktis B väärtus β. Eeldame, et funktsioonid $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ on pidevad lõigul $[\alpha; \beta]$, et neil on pidevad tuletised vahemikus $(\alpha; \beta)$ ja et $\dot{x} > 0$, st $x = x(t)$ on rangelt kasvav funktsioon. Teeme kaare pikkuse arvutamise valemis (5.12) muutuja vahetuse, st lähme üle parameetrile t. Parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni tuletis $f'(x) = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ja diferentsiaal $dx = \dot{x}dt$. Kui $x = a$, siis $t = \alpha$. Kui $x = b$, siis $t = \beta$. Valemist (5.12) saame

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \dot{x} dt.$$

Arvestades eeldust $\dot{x} > 0$ saame vaadeldaval juhul joone kaare pikkuse arvutamiseks valemi

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \tag{5.13}$$

Näide 2. Arvutame tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ühe kaare pikkuse.



Joonis 5.16. Tsükloidi kaar, kui $t \in [0; 2\pi]$

Tsükloid on tsükliline joon, mille üks kaar moodustub, kui parameeter t muutub väärtusest 0 väärtuseni 2π. Leiame tuletised $\dot{x} = a(1 - \cos t)$ ja $\dot{y} = a \sin t$ ning nende ruutude summa $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$. Järelikult $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2a \sin \frac{t}{2}$.

Nüüd saame valemi (5.13) abil

$$s = 2a \int\limits_{0}^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int\limits_{0}^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 4a \left(-\cos \frac{t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 8a.$$

Märkus. Ruumilise joone parameetriliste võrranditega $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ kaare pikkuse arvutamiseks parameetri muutumisel lõigul $[\alpha; \beta]$ kehtib valemiga (5.13) analoogiline valem

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \tag{5.14}$$

Näide 3. Leiame kruvijoone $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, kus a ja b on positiivsed konstandid, esimese keerme pikkuse.

Kruvijoone esimine keere moodustub, kui $0 \leq t \leq 2\pi$. Valemi (5.14) rakendamiseks leiame $\dot{x} = -a \sin t$, $\dot{y} = a \cos t$, $\dot{z} = b$ ja

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2 + b^2.$$

Valemi (5.14) järgi saame kruvijoone esimese keerme pikkuseks

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Olgu joone kaareks polaarkoordinaatides esitatud funktsiooni $\varrho = \varrho(\varphi)$ graafik, kui $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Asendades ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele ülemineku valemites (5.6) muutuja ϱ tema avaldisega φ kaudu, saame joone parameetrilised võrrandid

$$x = \varrho(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = \varrho(\varphi)\sin\varphi,$$

kus parameetriks on polaarnurk φ.

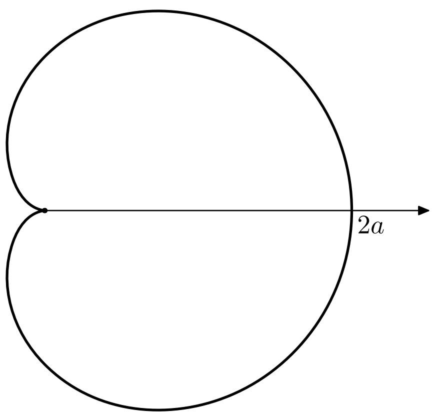
Kaare pikkuse valemi tuletamiseks kasutame valemit (5.13). Selleks leiame $\dot{x} = \varrho'(\varphi)\cos\varphi - \varrho(\varphi)\sin\varphi$ ja $\dot{y} = \varrho'(\varphi)\sin\varphi + \varrho(\varphi)\cos\varphi$ ning

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \varrho'^2(\varphi)\cos^2\varphi - 2\varrho'(\varphi)\cos\varphi\varrho(\varphi)\sin\varphi + \varrho^2(\varphi)\sin^2\varphi + \\ &+ \varrho'^2(\varphi)\sin^2\varphi + 2\varrho'(\varphi)\sin\varphi\varrho(\varphi)\cos\varphi + \varrho^2(\varphi)\cos^2\varphi = \\ &= \varrho'^2(\varphi)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \varrho^2(\varphi)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \varrho'^2(\varphi) + \varrho^2(\varphi).\end{aligned}$$

Seega saame valemist (5.13) polaarkoordinaatides esitatud joone $\varrho = \varrho(\varphi)$, kus $\alpha \le \varphi \le \beta$, kaare pikkuse arvutamiseks valemi

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} d\varphi. \tag{5.15}$$

Näide 4. Arvutame kardioidi $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$ pikkuse (joonis 5.17).



Joonis 5.17. Kardioid

Selle tõttu, et $\cos\varphi$ on paarisfunktsioon, on kardioid polaartelje suhtes sümmeetriline joon. Kogu kardioidi pikkuse arvutamiseks arvutame poole kardioidi (selle osa, kus $0 \leq \varphi \leq \pi$) pikkuse ja korrutame kahega. Valemi (5.15) kasutamiseks leiame $\varrho' = -a \sin \varphi$ ja

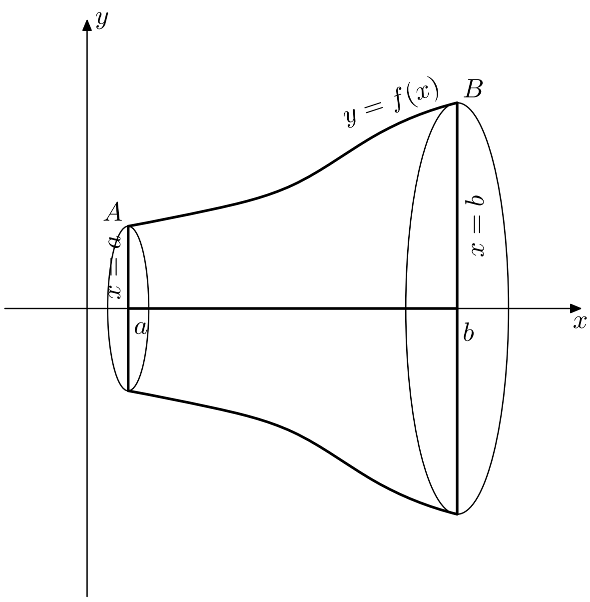
$$\varrho^2 + \varrho'^2 = a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi = 2a^2(1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Nüüd valemi (5.15)

$$s = 2 \int_0^\pi 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 8a \sin \frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$

5.12 Pöördkeha ruumala

Rahuldagu lõigul $[a; b]$ määratud ja pidev funktsioon $f(x)$ tingimust $f(x) \geq 0$. Olgu kõvertrapets (joonis 5.18) $abBA$ piiratud x-teljega, sirgetega $x = a$, $x = b$ ja funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga. Paneme kõvertrapetsi pöörlema ümber x-telje.

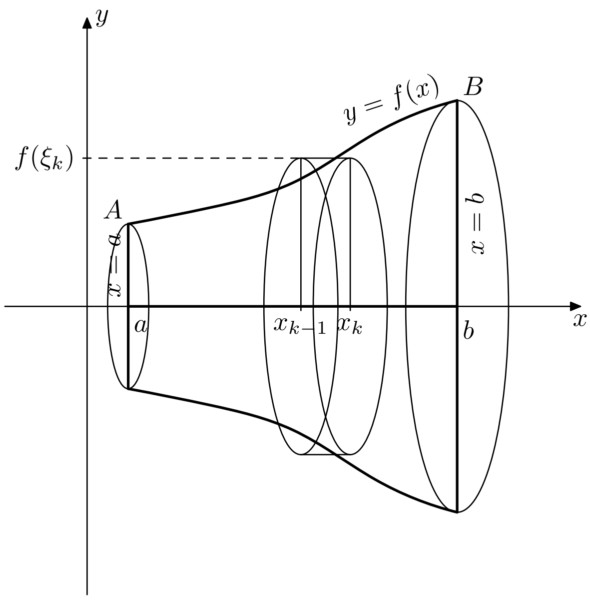


Joonis 5.18. Kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pöördkeha

Seame eesmärgiks tuletada tekkinud pöördkeha ruumala. Jaotame lõigu $[a; b]$ vabalt valitud punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n$$

n osalõiguks. Igal osalõigul valime suvalise punkti $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$. Jaotame pöördkeha x-teljega ristuvate tasanditega $x = x_k$ $(k = 0,\ 2,\ \ldots,\ n)$ kihtideks. Lähendame kihi, mis jääb tasandite $x = x_{k-1}$ ja $x = x_k$ vahele, ruumala niisuguse silindri ruumalaga, mille raadius on $f(\xi_k)$ ja kõrgus $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Selle silinri ruumala on $\Delta v_k = \pi f^2(\xi_k) \Delta x_k$.



Joonis 5.19. Pöördkeha lähendamine silindrite ruumalade summaga

Kõikide niisuguste silindrite ruumalade summa

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f^2(\xi_k) \Delta x_k$$

on funktsiooni $\pi f^2(x)$ integraalsumma. Selle summa piirväärtus piirprotsessis $\max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \to 0$ on võrdne integraaliga $\pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$. Seega on joone $y = f(x)$, kus $x \in [a; b]$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala V arvutatav valemist

$$V = \pi \int\limits_a^b y^2 dx. \tag{5.16}$$

Näide 1. Leiame poolringjoone $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pöörlemisel ümber x telje tekkinud pöördkeha ruumala.

Poolringjoon on sümmeetrilise y-telje suhtes. Seepärast leiame veerandringjoone, kus $0 \leq x \leq r$ pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pöördkeha ruumala ja korrutame tulemuse kahega. Valemist (5.16) saame $y^2 = r^2 - x^2$ tõttu, et

$$V = 2\pi \int\limits_0^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$